REVISIONS INTEGRATION : CORRIGE

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{Arctan}(x)dx$. On effectuera la changement de variable $t=\frac{1}{x}$,
2. $A=\int\limits_0^1 te^x dt, \quad B=\int_0^1 te^x dx, \quad C=\int\limits_0^1 e^{tx}dx,$
3. $D=\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx, \quad E=\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}, \quad F=\int\limits_0^1 \frac{dt}{3t+1}, \quad G=\int\limits_0^1 \frac{dt}{(2t+1)^3},$
4. $H=\int\limits_0^{\ln 2} e^x\sqrt{1+e^x}dx, \quad I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{(1+\cos^2(t))^2}dt, \quad J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(x)dx, \quad K=\int\limits_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx.$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$. On effectuera le changement de variable $t=\pi-x$, puis $y=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$.
2. $A=\int\limits_0^1 te^{t^2}dt, \quad B=\int_0^1 te^t dt, \quad C=\int\limits_0^1 t^2e^t dt,$
3. $D=\int\limits_0^1 te^{t^2+1}dt, \quad E=\int\limits_0^1 t^3e^{t^2+1}dt,$
4. $F=\int\limits_{-5}^{-1} \sqrt{1-3x}dx, \quad G=\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx, \quad H=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+4t^2},$

Exercice 3
Calculer l'intégrale suivante :

$$I=\int_3^4 \frac{1}{x(x-1)(x-2)}dx.$$

Exercice 4
Calculer

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}dt.$$

Exercice 5
Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad u_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}.$$

1.1. $\frac{3\pi}{4}$.

1.2. $A = \frac{e^x}{2}$, $B = t(e-1)$, $C = 1$ si $t = 0$, $C = \frac{e^t-1}{t}$ sinon.

1.3. $D = \frac{3}{2}$, $E = \ln(2)$, $F = \frac{2\ln(2)}{3}$, $G = \frac{2}{9}$.

1.4. $H = \frac{2}{3}(3^{3/2} - 2^{3/2})$, $I = \frac{1}{2}$, $J = \frac{2e^\pi+1}{5}$, $K = \ln(1+e) - \ln(2)$.

2.1. π.

2.2. $A = \frac{e-1}{2}$, $B = 1$, $C = e - 2$.

2.3. $D = \frac{e}{2}(e-1)$, $E = \frac{e}{2}$.

2.4. $F = \frac{112}{9}$, $G = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - 1)$, $H = \frac{\pi}{8}$.

3. $\frac{5}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)$.

4. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5. Sommes de Riemann :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{2} - 1.$$